① $y = \dfrac{x^2-6x+13}{x-3}$

1.1. Область определения ф-ии.

x – любое, кроме $x = 3$

или: $x \in R / \{3\}$

или: $x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$

1.2. Исследование функции на чётность, нечётность, периодичность.

$f(-x) = \dfrac{x^2+6x+13}{-x-3}$ $\qquad f(x) = \dfrac{x^2-6x+13}{x-3}$

$-f(x) = -\dfrac{x^2-6x+13}{x-3}$

$f(x) \neq f(-x); \quad f(-x) \neq -f(x)$

Поэтому функция не является чётной, не является нечётной.

Для определения периодичности выясним, при каких t выполняется равенство:

Если это равенство выполняется $\quad f(x+t) = f(x)$

только при $t=0$, то ф-ия не является периодической.

Вообще периодическими являются ф-ии, в составе которых есть тригонометрические ф-ии sin, cos, tg ctg и др. И эта ф-ия точно не будет периодической, но на всякий случай сделаю проверку.

$$\frac{(x+t)^2-6(x+t)+13}{x+t-3} = \frac{x^2-6x+13}{x-3}$$

$$(x+t)^2(x-3) - 6(x+t)(x-3) + 13(x-3) =$$

$$= (x^2-6x+13)(x+t-3)$$

$(x^2+2tx+t^2)(x-3)-6(x^2-3x+tx-3t)+$
$+13x-39 = x^3+tx^2-3x^2-6x^2-6tx+$
$+18x+13x+13t-39$

$\cancel{x^3}-\cancel{3x^2}+2tx^2-\cancel{6tx}+\underbrace{x^2t}-3t^2-\cancel{6x^2}+\cancel{18x}-6tx+18t+\cancel{13x}-\cancel{39} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{x^3}+\underbrace{tx^2}-\cancel{3x^2}-\cancel{6x^2}-\cancel{6tx}+\cancel{18x}+\cancel{13x}+13t-\cancel{39}$

$2tx^2-3t^2-6tx+18t = 13t$

$2tx^2-3t^2-6tx+5t=0$

$t(2x^2-3t-6x+5)=0;$ $\Rightarrow$ только при $t=0$ выполнимо данное равенство

$\Rightarrow$ функция не является периодической

1.3 Нахождение участков непрерывности и точек разрыва.

Выясним, как ведёт себя функция в точке $x=3$ (т.к. эту точку можно назвать особой, потому что функция в ней не определена)

$\lim\limits_{x\to 3-0} \dfrac{x^2-6x+13}{x-3} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 3+0} \dfrac{x^2-6x+13}{x-3} = +\infty$

$\Rightarrow$ в точке $x=3$ функция имеет разрыв второго рода

При этом, функция непрерывна при $x\in(-\infty;3)$ и при $x\in(3;+\infty)$

$(x^2+2tx+t^2)(x-3)-6(x^2-3x+tx-3t)+$
$+13x-39 = x^3+tx^2-3x^2-6x^2-6tx+$
$+18x+13x+13t-39$

$\cancel{x^3}-\cancel{3x^2}+2tx^2-\cancel{6tx}+\cancel{x^2t}-3t^2-\cancel{6x^2}+\cancel{18x}-6tx+18t+\cancel{13x}-\cancel{39} =$

$= \cancel{x^3}+\cancel{tx^2}-\cancel{3x^2}-\cancel{6x^2}-\cancel{6tx}+\cancel{18x}+\cancel{13x}+13t-\cancel{39}$

$2tx^2-3t^2-6tx+18t = 13t$

$2tx^2-3t^2-6tx+5t=0$

$t(2x^2-3t-6x+5)=0;$ $\Rightarrow$ только при $t=0$ выполнимо данное равенство

$\Rightarrow$ функция не является периодической

1.3 Нахождение участков непрерывности и точек разрыва.

Выясним, как ведёт себя функция в точке $x=3$ (т.к. эту точку можно назвать особой, потому что функция в ней не определена)

$\lim\limits_{x\to 3-0} \dfrac{x^2-6x+13}{x-3} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 3+0} \dfrac{x^2-6x+13}{x-3} = +\infty$

$\Rightarrow$ в точке $x=3$ функция имеет разрыв второго рода

При этом, функция непрерывна при $x\in(-\infty;3)$ и при $x\in(3;+\infty)$

1.4 Точки пересечения с осями координат. Стр. 3

с осью OX: $y=0$

$$\Rightarrow \frac{x^2-6x+13}{x-3}=0$$

$$\Rightarrow x^2-6x+13=0 \ ; \ D=36-52<0$$

$\Rightarrow$ ни при каких действительных x данное равенство не выполняется

~~$x^2-6x+13x$~~

$\Rightarrow$ точек пересечения с осью OY нет

с осью OY: $x=0$

$$y=\frac{0-0+13}{0-3}; \Rightarrow y=-\frac{13}{3}=-4\frac{1}{3}$$

$\Rightarrow$ график функции пересекает ось OY в точке с координатами $(0; -4\frac{1}{3})$

1.5 Интервалы знакопостоянства

$$y=\frac{x^2-6x+13}{x-3}; \text{ знаменатель всегда} > 0 \text{ при любых } x$$

тогда при $x<3$ $f(x)<0$

при $x>3$ $f(x)>0$

1.6. Интервалы возрастания и убывания, экстремумы функции.

$$f(x)=\frac{x^2-6x+13}{x-3}$$

$$f'(x)=\frac{(2x-6)(x-3)-(x^2-6x+13)}{(x-3)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^2-6x-6x+18-x^2+6x-13}{(x-3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}; \quad x^2-6x+5 =$$
$$= x^2-6x+6-1 =$$
$$= (x^2-1)-(6x+6) =$$
$$= (x-1)(x+1)-6(x+1) = (x-1)(x+1-6) =$$
$$= (x-1)(x-5)$$

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}$$

т.к. $(x-3)^2 > 0$ при любых "x", то при $(x-1)(x-5) > 0$; $x \in (-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$

при $\left.\begin{array}{l} x \in (-\infty; +1) \\ x \in (5; +\infty) \end{array}\right\}$ $f'(x) > 0$

$\Rightarrow$ функция возрастает при $x \in (-\infty; 1)$ и $x \in (5; +\infty)$ (т.к. $f'(x) > 0$)

$f(1) = -4$
$f(5) = 4$

при $x \in (1; 5)$, $f'(x) < 0$, ф-ия убывает

$x = 1$; $x = 5$ $\rightarrow$ проверим на экстремум

при переходе через $x = 1$ производная меняет знак с "+" на "−", поэтому $x = 1$ – максимум ф-ии. При переходе через $x = 5$ производная меняет знак с "−" на "+", поэтому $x = 5$ – минимум. Точка max $M(5; 4)$, min $N(1; -4)$

1.7. Выпуклость, вогнутость, точки перегиба

$$f''(x) = \left(\frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}\right)'$$

$$f''(x) = \frac{(2x-6)(x-3)^2 - (x^2-6x+5)(2x-6)}{(x-3)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(2x-6)(x^2-6x+9) - (x^2-6x+5)(2x-6)}{(x-3)^4}$$

стр. 5

$$f''(x) = \frac{(2x-6)(x^2-6x+9-x^2+6x-5)}{(x-3)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(2x-6)(4)}{(x-3)^4}$$

$\Rightarrow$ при $x > 3$ $f''(x) > 0$ и ф-ия вогнутая вниз ($\cup$)

при $x < 3$ $f''(x) < 0$ и ф-ия вогнутая вверх (выпуклая, $\cap$)

1.8. Асимптоты

Вертикальная асимптота $x = 3$ (исходя из области определения)

Рассмотрим, есть ли наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2-6x+13}{x^2-3} = 1$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2-6x+13}{x-3} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2-6x+13-x^2+3x}{x-3} \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-3x+13}{x-3} = -3$$

$\Rightarrow$ уравнение наклонной асимптоты: $y = x - 3$

1.9. График

стр. 6