(2) $y = x + \operatorname{arctg}(2x)$

2.1. Область определения ф-ции.

x – любое (или $x \in \mathbb{R}$; или $x \in (-\infty; +\infty)$)

2.2. Исследование функции на чётность, нечётность, периодичность:

$f(-x) = -x + \operatorname{arctg}(-2x)$; т.к. $\operatorname{arctg}(-2x) =$

$= -\operatorname{arctg} 2x$, то:

$f(-x) = -x - \operatorname{arctg} 2x$

$-f(x) = -x - \operatorname{arctg} 2x$; $\Rightarrow$ $f(x) \neq f(-x)$

$f(-x) = -f(x)$

$\Rightarrow$ функция является нечётной (симметрична относительно начала координат)

Для определения периодичности выясним, при каких t выполняется равенство

$f(x+t) = f(x)$. Если равенство выполняется только при $t=0$, то ф-ия не является периодической.

$x + t + \operatorname{arctg}(2x+2t) = x + \operatorname{arctg}(2x)$

$t + \operatorname{arctg}(2x+2t) = \operatorname{arctg}(2x)$

$t = \operatorname{arctg}(2x) - \operatorname{arctg}(2x+2t)$

Решением этого уравнения (относительно t) является $t = 0$ (лучше всего решать графически)

$\Rightarrow$ функция <u>не является периодической</u>

$$\Rightarrow t = \begin{cases} \operatorname{arctg} 0 \\ \pi + \operatorname{arctg} 0 \\ -\pi + \operatorname{arctg} 0 \end{cases} ; \quad t = \begin{cases} 0 + \pi l, \ l \in \mathbb{Z} \\ \pi + \pi n; \ n \in \mathbb{Z} \\ -\pi + \pi k; \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

стр. 2

$$\Rightarrow \quad t = \pi m; \ m \in \mathbb{Z}$$

Подставляя в уравнение:

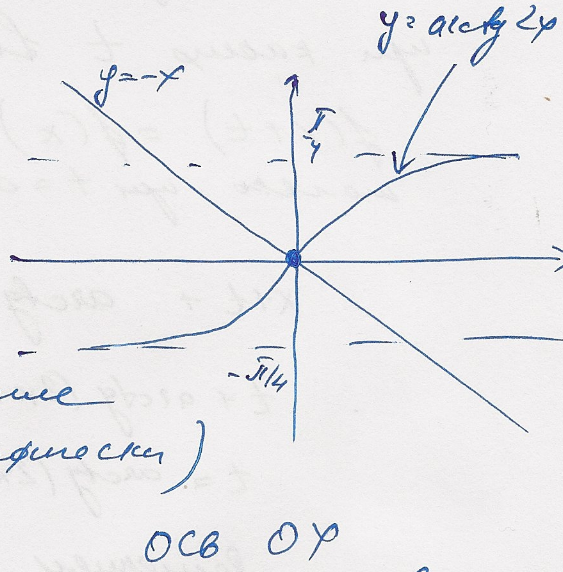
$$x + \pi m + \operatorname{arctg}(2x + 2\pi m) = x + \operatorname{arctg}(2x)$$

2.3 Нахождение участков непрерывности и точек разрыва.

Функция определена на всей числовой оси.

Точек разрыва нет. Функция непрерывна на всей числовой оси

2.4 Точки пересечения с осями координат.



ось OX: $y = 0$

$\Rightarrow \quad 0 = x + \operatorname{arctg} 2x$

$-x = \operatorname{arctg} 2x$

$\boxed{x = 0}$ (решение лучше получить графически)

ось OY: $x = 0$

$\Rightarrow y = 0 + \operatorname{arctg} 0$

$\boxed{y = 0}$

$\Rightarrow$ Ось OX пересекается в точке $(0;0)$

Ось OY пересекается в точке $(0;0)$

2.5. Интервалы знакопостоянства.

$y = x + \operatorname{arctg} 2x$; т.к. при $x \geq 0$ $\operatorname{arctg} 2x \geq 0$, (стр. 3)

то $y \geq 0$ при $x \geq 0$

$y < 0$, при $x < 0$

2.6. Интервалы возрастания и убывания ф-ции

$f(x) = x + \operatorname{arctg} 2x$

$f'(x) = 1 + \frac{1}{1+4x^2} \cdot 2$

$f'(x) = 1 + \frac{2}{1+4x^2}$; $f'(x) > 0$ при любых x

$\Rightarrow$ Функция $f(x) = x + \operatorname{arctg} 2x$ возрастает на всей числовой оси.

2.7. Выпуклость, вогнутость, точки перегиба.

$f''(x) = \left(1 + \frac{2}{1+4x^2}\right)'$; $f''(x) = \frac{-(8x) \cdot 2}{(1+4x^2)^2}$

$f''(x) = \frac{-16x}{(1+4x^2)^2}$; т.к. $(1+4x^2)^2 > 0$ при любых x, то

$f''(x) < 0$, при $x > 0$, то есть функция вогнутая вверх (выпуклая, ⌒)

$f''(x) > 0$, при $x < 0$, то есть ф-ия вогнутая вниз (◡)

$x = 0$ – точка, переходя через которую вторая производная ($f''(x)$) меняет знак, т.е. $x = 0$ – точка перегиба.

2.8. Асимптоты.

Вертикальных асимптот нет (функция непрерывна на всей числовой оси)

Рассмотрим, есть ли наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$k_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x}\right) =$$

$$= 1 + \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{(\operatorname{arctg} 2x)'}{(x)'}}_{\text{искали предел по правилу Лопиталя}} = 1 + \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{1+4x^2} \cdot 2}{1} =$$

$$= 1 + \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{2}{1+4x^2}}_{\to 0} = 1$$

$$b_1 = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to +\infty} (x + \operatorname{arctg} 2x - x) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (\operatorname{arctg} 2x) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$ уравнение асимптоты $y = x + \frac{\pi}{2}$

$$k_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x}\right) = 1 + \lim_{x \to -\infty} \frac{\operatorname{arctg}}{x} =$$

$$= 1$$

$$b_2 = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to -\infty} (x + \operatorname{arctg} 2x - x) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} (\operatorname{arctg} 2x) = -\frac{\pi}{2}$$; уравнение асимптоты $y = x - \frac{\pi}{2}$

2. 9. График