Исследовать функцию $y = x + \frac{1}{2x^2}$ и построить её график. ①

Решение:

① ОДЗ $x \neq 0$

$x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

② Исследование функции на чётность, нечётность, периодичность.

$$f(x) = x + \frac{1}{2x^2}; \quad f(-x) = -x + \frac{1}{2x^2}$$

$$f(x) \neq f(-x); \quad -f(x) \neq f(-x)$$

Функция не является ни чётной, ни нечётной.

В уравнении функции нет периодических функций (sin, cos, tg, ctg). Функция не является периодической.

③ Участки непрерывности и точки разрыва.

Так как по ОДЗ $x \neq 0$ то надо исследовать на наличие разрыва точку $x = 0$

$$\lim_{x \to 0-0} \left(x + \frac{1}{2x^2} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0+0} \left(x + \frac{1}{2x^2} \right) = +\infty$$

=> т.к. оба предела бесконечны, то разрыв второго рода

в точке $x = 0 \rightarrow$ разрыв второго рода

На всей остальной числовой оси функция непрерывна.

4. Точки пересечения с осями координат

с осью Ox: $y=0 \Rightarrow 0 = x + \frac{1}{2x^2}$; $x = -\frac{1}{2x^2}$

$-2x^3 = 1$; $x^3 = -\frac{1}{2}$; $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}} \approx 0{,}79$

точка пересечения с осью Ox: $A\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}; 0\right)$

с осью OY: $x = 0$; так как по ОДЗ $x \neq 0$

$\Rightarrow$ функция (график функции) не имеет пересечений с осью OY

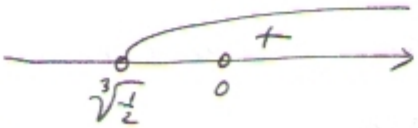
5 Интервалы знакопостоянства

$$y = x + \frac{1}{2x^2}$$

а) $f(x) > 0$

$$x + \frac{1}{2x^2} > 0$$

$$\frac{2x^3+1}{2x^2} > 0 \rightarrow 2x^3 + 1 > 0;\ x > \sqrt[3]{-\frac{1}{2}}$$



$2x^2 \neq 0$ – по ОДЗ $x \neq 0$

$2x^2 > 0$, т.к. $x^2 > 0$ при любых x у ОДЗ

$\Rightarrow f(x) > 0$ при $x > \sqrt[3]{-\frac{1}{2}}$

б) $f(x) < 0$ $\quad x + \frac{1}{2x^2} < 0$; $\quad \frac{2x^3+1}{2x^2} < 0$

$\Rightarrow f(x) < 0$ при $x < \sqrt[3]{-\frac{1}{2}}$

6 Интервалы возрастания и убывания функции

$$y = x + \frac{1}{2x^2}$$

а) $y' > 0$; $f(x)\uparrow$

$$y' = 1 - \frac{1}{x^3};\qquad 1 - \frac{1}{x^3} > 0$$

точка $(1; \frac{3}{2})$ — минимум

$$\frac{1}{x^3} < 1 \iff \frac{1-x^3}{x^3} < 0$$

$+$ 0 $-$ 1 $+$ $f'(x)$

$\nearrow$ 0 $\searrow$ 1 $\nearrow$ $f(x)$

$x^3 > 1$ $\qquad$ $x^3 < 0$

$x > 1$ $\qquad$ $x < 0$

$\boxed{X = 1 \text{ - точка минимума}}$

$\Rightarrow$ при $x > 1$ $f(x)\uparrow$

$x < 0$ $f(x)\uparrow$

$$f(1) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

б) $y' < 0$; $f(x)\downarrow$

$$1 - \frac{1}{x^3} < 0;\qquad \frac{1}{x^3} > 1;\qquad \frac{1-x^3}{x^3} > 0$$

$-$ 0 $+$ 1 $-$

$f(x)\downarrow$ при $x \in (0; 1)$

7 Выпуклость, вогнутость, точки перегиба

$$y'' = \frac{3}{x^4};\qquad x^4 > 0 \text{ при любых } x \text{ у ОДЗ}$$

$\Rightarrow y'' > 0$ на всей области определения функции

$\Rightarrow$ функция вогнутая вниз

8 Асимптоты

а) Вертикальная асимптота: т.к. $x \neq 0$

$\Rightarrow$ $x = 0$ $\rightarrow$ вертикальная асимптота

б) Наклонные асимптоты: $y = kx + b$

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}\ ;\ b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - k\cdot x\right)$$

$x \to +\infty$

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + \frac{1}{2x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{2x^3}\right) = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x + \frac{1}{2x^2} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

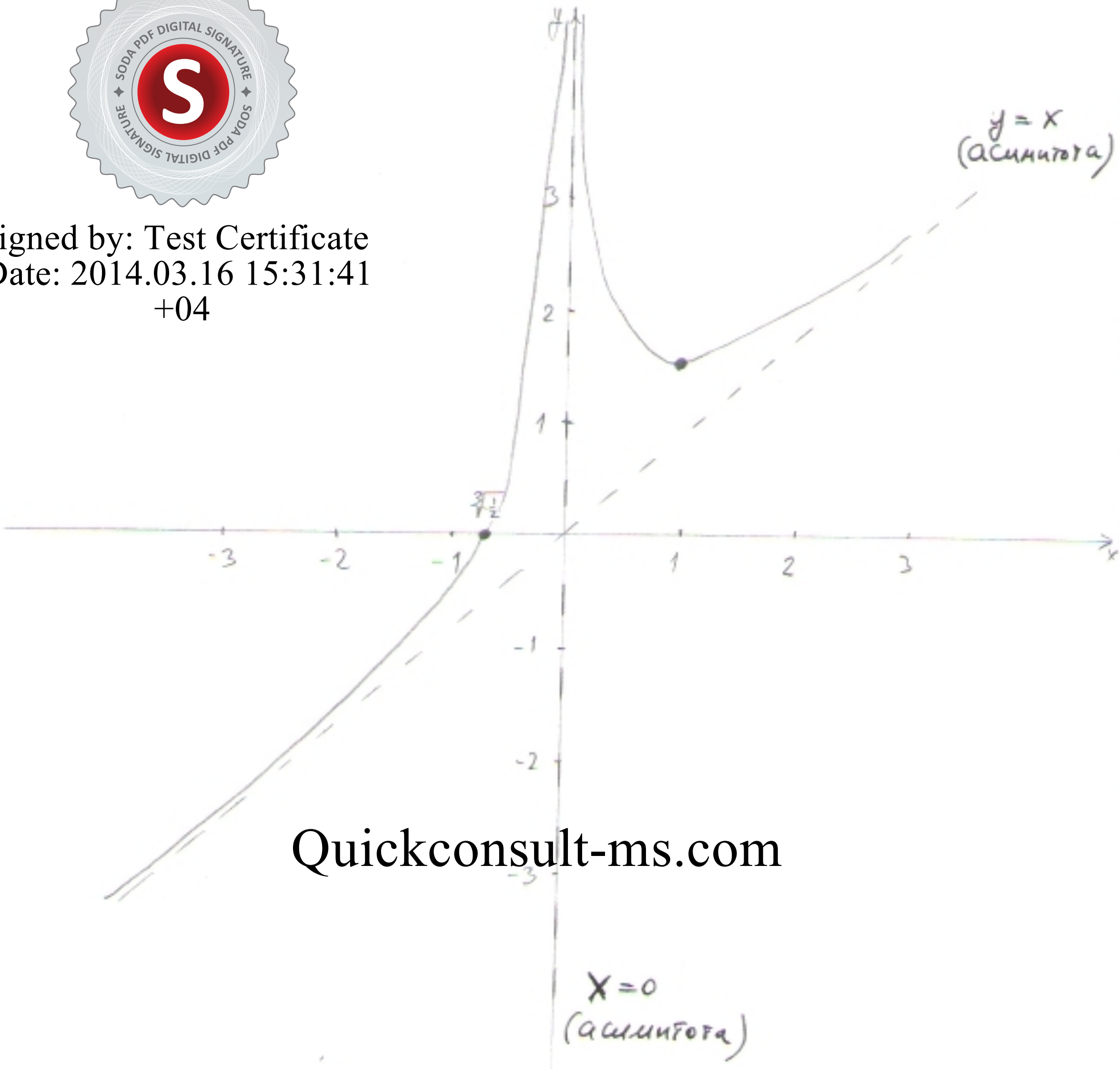
$\Rightarrow$ при $x \to +\infty$ асимптота $y = x$

$$x \to -\infty\ ;\ k = \lim_{x\to-\infty} \frac{x + \frac{1}{2x^2}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{1}{2x^3}\right) = 1$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}\left(f(x) - x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(x + \frac{1}{2x^2} - x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

$\Rightarrow$ при $x \to -\infty$ асимптота $y = x$

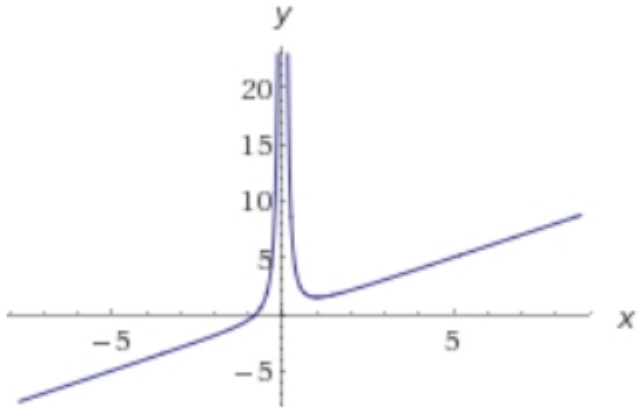
9 График



Input:

Проверка в wolframalpha.com

$$y = x + \frac{0.5}{x^2}$$



(x from −7.5 to 7.5)