Исследовать функцию и построить её график (1)

$$y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$$

1) Область определения функции

x – любое ($x \in R$)

2) Чётность, нечётность, периодичность

$f(-x) \neq f(x)$

$f(-x) \neq -f(x)$

$f(x) = f(x+t)$ только при $t = 0$

$\Rightarrow$ функция не является ни чётной, ни нечётной, ни периодической

3) Точки непрерывности и точки разрыва

Так как функция определена на всей числовой оси, то функция непрерывна на всей числовой оси.

4) Точки пересечения с осями координат

ось OX: $y = 0$

$$\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2} = 0$$

$$\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{(x-1)^2} \quad \Rightarrow \quad x^2 = (x-1)^2$$

$$x^2 - x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$2x = 1; \; x = \frac{1}{2}$$

пересечение с осью OX в точке $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$

Пересечение с осью ОY:

$x = 0$

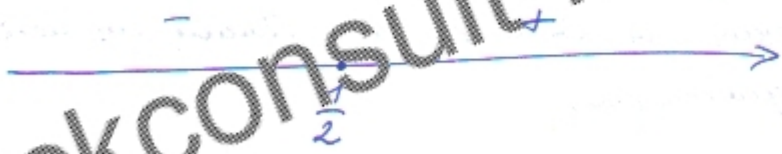
$y = 0 - 1 \quad ; y = -1$

пересечение с осью ОY в точке $(0; -1)$

5) Интервалы знакопостоянства

$$\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$



при $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$ $f(x) \le 0$

при $x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ $f(x) > 0$

6) Интервалы возрастания и убывания функции

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}} = 0$$

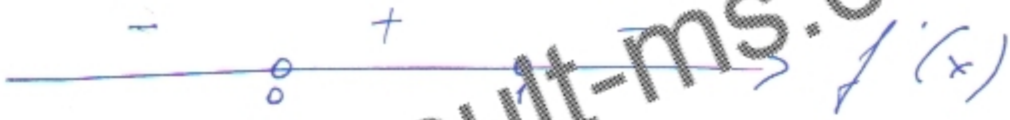
$\Rightarrow \quad x^{-\frac{1}{3}} - (x-1)^{-\frac{1}{3}} = 0$

$\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}} = 0 \quad \Rightarrow$ в точках $x=0$ и $x=1$ производная не определена

$\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}$

$x^{\frac{1}{3}} = (x-1)^{\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow \quad x = x-1 \Rightarrow$ нет корней



$x \in (-\infty, 0)$ − функция убывает

$x \in (0, 1)$ − функция возрастает

$x = 1$ − максимум $(y=1)$; $x=0$ − минимум $(y=-1)$

$x \in (1; +\infty)$ − функция убывает.

7) Выпуклость, вогнутость, точки перегиба

$f''(x) = -\frac{2}{9} x^{-\frac{4}{3}} + \frac{2}{9}(x-1)^{-\frac{4}{3}}$

$f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}} + \frac{2}{9\sqrt[3]{(x-1)^4}}$; $f''(x)$ не определена в точках: $x=0$, $x=+1$

$f''(x) = 0$; $-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}} + \frac{2}{9\sqrt[3]{(x-1)^4}} = 0$

$$-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}} + \frac{2}{9\sqrt[3]{(x-1)^4}} = 0$$

$$\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}} = \frac{2}{9\sqrt[3]{(x-1)^4}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x^4} = \sqrt[3]{(x-1)^4}$$

$$x^4 = (x-1)^4$$

$$\Rightarrow x^4 - (x-1)^4 = 0$$

$$\left(x^2 - (x-1)^2\right)\left(x^2 + (x-1)^2\right) = 0$$

$$\left(x^2 - x^2 + 2x - 1\right)\left(x^2 + x^2 - 2x + 1\right) = 0$$

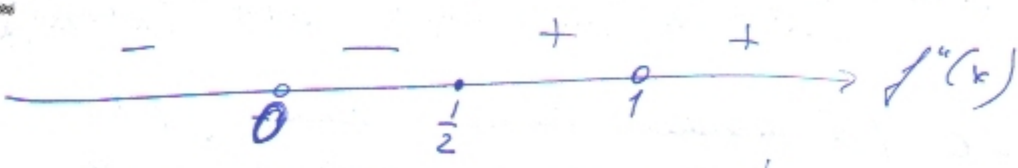
$$(2x-1)(2x^2 - 2x + 1) = 0$$

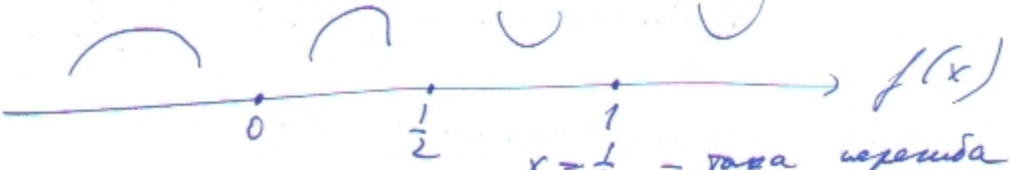
$$\left[\begin{array}{l} 2x-1=0 \\ 2x^2-2x+1=0 \end{array}\right. \qquad x = \frac{1}{2}$$

$2x^2 - 2x + 1 = 0$

$D = 4 - 8 < 0$

$\Rightarrow$ нет корней





$x = \frac{1}{2}$ – точка перегиба

$(y =$

8) Асимптоты.

Так как функция определена на всей числовой оси, то вертикальных асимптот нет.

Наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}} - \sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{x^3}} \right) =$$

$$= 0$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - k(x) \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) \right) =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2} \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}\right)\left(\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^4}\right)}{\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^4}}$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - (x-1)^2}{\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^4}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x-1}{\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^4}} =$$

$= 0$ (в числителе старшая степень «1», в знаменателе — «4/3», $\frac{4}{3} > 1$)

$\Rightarrow$ при $x \to +\infty$ асимптота $y = 0$

при $x \to -\infty$ асимптота $y = 0$.

9) График