

Вычислить интеграл:

$$\oint_{|z|=0,5} \frac{\sin z}{z^2} dz$$

Решение:

Внутри контура интегрирования лежит одна особая точка $z=0$. При этом знаменатель содержит выражение z^2 . Воспользовались интегральной формулой Коши:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta = \begin{cases} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z) & \text{при } z \in D, \\ 0 & \text{при } z \notin \bar{D}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Приняли $n=1$ и $f(\zeta) = \sin \zeta$

Тогда:

$$\oint \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} = 2\pi i (\sin z)'_z = 2\pi i \cos z$$

При $z=0$ получили:

$$\oint \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} = 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i$$